Mathématiques* 1

(Licence 1, semestre 1)

Yong FANG
Bureau E510, Site Saint Martin, UFR Sciences et Techniques,
CY Cergy-Paris Université
Courriel : yfang@cyu.fr
Tél : 01 34 25 66 92

Table des matières

1 Prérequis

1.1 Vecteurs, produit scalaire, droites dans le plan

1.2 Fonctions, fonctions affines

2 Nombres réels

2.1 Rappel, quelques nouveautés

Les ensembles à connaitre :
$\mathbb{N}$
$\mathbb{N}^*$
$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$

Question. Est ce que tous les nombres sont rationels ?
($\sqrt{2}$, $\pi = 3,1415926...$)

On constate qu'un nombre, même irrationnel, s'écrit sous la forme d'un développement décimal infini. Dans ce cours, nous prenons cette représentation décimale comme définition d'un nombre réel.

Definition 2.1. Un nombre réel est donné par son développement décimal suivant

$$x = c_m c_{m-1} ... c_1 c_0, d_1 d_2 d_3 ...$$

où les chiffres sont compris entre 0 et 9 et les $\{d_j\}$ peuvent être en nombre infini. L'ensemble des nombres réels est noté par $\mathbb{R}$.

Exemples de nombres rationels :
$\frac{2}{5} = 0,4$
$\frac{3}{8} = 0,375$
$\frac{1}{3} = 0,33333...$
$\frac{2}{7} = 0,285714285714285714...$
$0,35 = \frac{35}{100}$
$0,1666... = \frac{1}{6}$.

Theorem 2.2. *Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.*

Soit $x = c_m c_{m-1} ... c_1 c_0, d_1 d_2 d_3 ...$ un nombre réel et $n \in \mathbb{N}^*$. *La troncature de* x *au* 10^{-n} est définie par :

$$t =$$

Cette troncature est une valeur approchée de x à 10^{-n} près, car

L'arrondi de x au 10^{-n} est défini comme ci-dessous :

L'arrondi est également une valeur approchée de x à 10^{-n} près, car

Intervalles :

Valeur absolue :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, la *distance* entre x et y est définie par

$$d(x, y) = \mid x - y \mid .$$

Identités remarquables :

1)
Rappel : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Généralisation :
Nombres de combinaison :

La formule du binôme de Newton :

2)
Rappel : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Généralisation :

2.2 Proportionnalité, pourcentage

2.3 Le langage mathématique

Une *définition* précise le sens d'un mot. Par exemple, *une équation du second degré* est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$; un *entier naturel* est un nombre qui fait partie de la liste $\{0, 1, 2, \cdots\}$.

Un *énoncé* est une phrase ayant un sens précis, qui peut être vrai ou faux. Un *théorème* (ou *lemme*, ou *proposition*, ou *corollaire*) est un énoncé vrai.

Les *connecteurs logiques* permettent de relier les énoncés, dont deux usuels sont : implique (en symbole $\Rightarrow$), équivaut (en symbole $\Leftrightarrow$).

Une *démonstration* est un ensemble d'énoncés, muni des connecteurs logiques et valable logiquement. Voici plusieurs types de démonstrations :

Démonstration directe :
Pour dmontrer que l'énoncé A implique l'énoncé B, on part de B, en passant par une srie d'énoncés intermédiaires, pour arriver à B.

Démonstration par labsurde :
Pour dmontrer que l'énoncé A implique l'énoncé B, on suppose par l'absurde que B ne soit pas vrai. On démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction, pour en déduire que B soit vrai.

Démonstration par récurrence (pour justifier qu'une série infinie d'énoncés $\{A_0, A_1, A_2, \cdots\}$ soient vrais) :
(Initialisation) On justifie que A_0 est vrai ;
(Hérédité) On suppose que pour un certain entier naturel k, A_k soit vrai. Puis, à l'aide de cette hypothèse, on démontre que l'énoncé suivant A_{k+1} est vrai ;
(Conclusion) D'après le principe de récurrence, A_n est vrai, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

Les *quantificateurs* permettent d'alléger la rédaction d'une démonstration, qui sont : *il existe* (en symbole $\exists$), *il existe un unique* (en symbole $\exists!$) et *pour tout* (en symbole $\forall$).

3 Géométrie dans l'espace

3.1 Points et vecteurs dans l'espace

En mathématiques, on considère que l'espace est tout simplement l'ensemble
$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$
Un élément $A = (x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$, noté habituellement $A(x; y; z)$, est appelé *point* de l'espace dont les coordonnées sont x, y et z. Le point de coordonnées $(0; 0; 0)$, noté O, s'appelle *le point d'origine* .

Vecteurs : définition, coordonnées et colinéarité.

L'équation paramétrique d'une droite :

L'équation paramétrique d'un plan :

Repères et orientations :

Proposition 1. *Soit* $(O', \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}')$ *un repère général. Pour tout point* $M \in \mathbb{R}^3$*, il existe un unique triplet* $(\alpha; \beta; \gamma)$ *de nombres réels tel que*

$$\overrightarrow{O'M} = \alpha \overrightarrow{i}' + \beta \overrightarrow{j}' + \gamma \overrightarrow{k}'.$$

On appelle ce triplet $(\alpha; \beta; \gamma)$ *les coordonnées de* M *dans le repère* $((O', \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}')$.

On remarque que dans le repère canonique, les coordonnées de $M(x; y; z)$ sont précisément $(x; y; z)$, c'est-à-dire que

$$\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + z \overrightarrow{k}.$$

Il est possible de relier les coordonnées de M dans un repère général à ses coordonnées dans le repère canonique, à l'aide des matrices, que l'on verra en détail au semestre 2.

3.2 Produit scalaire

Définitions :

L'Inégalité de Cauchy et l'angle entre deux vecteurs :

Orthogonalité et repères orthonormés :

Proposition 2. *(1) Soit* $(O', \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}')$ *un repère orthonormal, soit* $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i}' + b\overrightarrow{j}' + c\overrightarrow{k}'$ *et* $\overrightarrow{v} = a'\overrightarrow{i}' + b'\overrightarrow{j}' + c'\overrightarrow{k}'$*, alors*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'.$$

(2) (Généralisation du théorème de Pythagore)

$$\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{u} \|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}.$$

On obtient alors que $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{u} \|^2$ *si et seulement si* $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$*.*

3.3 Produit vectoriel, produit mixte

Définition :

Propriétés :
(1) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{v}$.

(2) $\| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \| = \| \overrightarrow{u} \| \cdot \| \overrightarrow{u} \| \cdot | \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) |$; $\| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \|$ est égale à l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

(3) Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

(4) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est un repère direct.

Définition du produit mixte :

Proposition 3. *Le produit mixte* $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est égale au volume du parallélépipède engendré par* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$*. Par conséquent,* $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *forme un repère si et seulement si* $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \neq 0$ *; le repère est direct si et seulement si* $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) > 0$.

3.4 Droites et plans dans l'espace

L'équation paramétrique et l'équation cartésienne d'un plan :

Positions relatives :

4 Suites

4.1 Définition et généralités

Definition 4.1. Une *suite* est une série de nombres réels qui sont numérotés à l'aide de l'ensemble $\mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, le terme au rang n (ou d'indice n) d'une suite est noté couramment u_n.

Exemples de suites :
(0) $\{4, 3, -1, 0, 9, 16, 3, 4, \cdots\}$.
(1) $u_n = 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, d'où $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6, \cdots$.
(2) $v_n = 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, d'où $v_0 = 1, v_1 = 2, v_2 = 4, v_3 = 8, \cdots$.
(3) $w_n = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(4) $u_n = 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(5) $v_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
(6) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dans ce type de situation, on dit que la suite est *définie par récurrence*.

Généralités :

4.2 Convergence

Definition 4.2. On dit qu'une suite réelle (u_n) converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \;\; tel \;\; que \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow \mid u_n - l \mid \leq \epsilon.$$

On dit que l est la *limite* de la suite et on note $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.

Exemple : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Propriétés :

Theorem 4.3. *(admis) Si une suite est croissante et majorée, alors elle converge ; si une suite est décroissante et minorée, alors elle converge.*

4.3 Sous suites

Definition 4.4. Etant donnée une suite (u_n), une *sous suite* de (u_n) est le choix d'une infinité de termes de (u_n), dans l'ordre croissant d'indices.

Exemples :

$$\{u_0, u_2, u_4, u_6, \cdots\}.$$

$$\{u_1, u_3, u_5, u_7, \cdots\}.$$

$$\{u_0, u_1, u_4, u_9, \cdots\}.$$

Theorem 4.5. *(Bolzano-Weierstrass) Si (u_n) est bornée, alors elle possède une sous suite convergente.*

5 Etude de fonctions

5.1 Généralités

5.2 Fonctions usuelles

Polynômes, fractions rationnelles :

Logarithmes, exponentielles, puissances :

Fonctions trigonométriques, leurs réciproques :

5.3 Limites, continuité, théorème des valeurs intermédiaires

Définitions :

Propriétés :

Méthodes de calcul de limite :

Définition de la continuité :

Propriétés :

Theorem 5.1. *(Théorème des valeurs intermédiaires) Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors pour tout* c *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*, il existe* $x \in [a, b]$ *tel que*

$$f(x) = c.$$

Corollaires :

5.4 Dérivabilité, théorème des accroissements finis

Définitions :

Propriétés :

Les formules de dérivées, où $U(x)$ est une fonction de variable x :

f	f'	f	f'
c	0	c	0
$x^a, \quad a \neq 0$	ax^{a-1}	U^a	$aU^{a-1} \cdot U'$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln U$	$\frac{1}{U} \cdot U'$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$	$\log_a U$	$\frac{1}{\ln a \cdot U} \cdot U'$
e^x	e^x	e^U	$e^U \cdot U'$
$a^x, \quad a > 0$	$\ln a \cdot a^x$	a^U	$\ln a \cdot a^U \cdot U'$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos U$	$-\sin U \cdot U'$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin U$	$\cos U \cdot U'$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos U$	$-\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin U$	$\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan U$	$\frac{1}{1+U^2} \cdot U'$

Definition 5.2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, soit $x_0 \in I$. On dit que x_0 est *maximum local* de f s'il existe un petit voisinage J de x_0 tel que

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in J.$$

On dit que x_0 est *minimum local* de f s'il existe un petit voisinage J de x_0 tel que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in J.$$

On dit que x_0 est un extremum local de f s'il est un manimum local ou un minimum local.

Proposition 4. *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, soit $x_0 \in]a, b[$. Si x_0 est un extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$.*

Theorem 5.3. *(Rolle) Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$*. Si* $f(a) = f(b)$ *alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$f'(c) = 0.$$

Theorem 5.4. *(Théorème des accroissements finis) Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$*. Alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Corollaires :

5.5 Dérivées d'ordre supérieur, équivalents, règle de L'Hopital

Définitions :

Propriétés :

Theorem 5.5. *(Théorème de Taylor-Lagrange) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et $(n+1)$ fois dérivable. Soit $x_0 \in]a,b[$, alors pour tout $x \in]a,b[$, il existe c strictement compris entre x et x_0 tel que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

On appelle le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ équivalent d'ordre n de f en x_0.

Ce théorème important permet d'approximer dans un voisinage d'un point donné, à la précision voulue, une fonction par un polynôme. Voici les équivalents de quelques fonctions usuelles en 0 :

f	l'équivalent d'ordre n en 0
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad m = E(\frac{n}{2})$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad m = E(\frac{n-1}{2})$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + ... + x^n$
$(1+x)^a \quad a \neq -1$	$1 + ax + a(a-1)\frac{x^2}{2!} + ... + a(a-1)...(a-n+1)\frac{x^n}{n!}$

Theorem 5.6. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et 2 fois dérivable sur $]a,b[$. Soit $x_0 \in]a,b[$ tel que $f'(x_0) = 0$.*

(1) Si $f''(x_0) > 0$*, alors* x_0 *est un minimum local de* f *;*
(2) si $f''(x_0) < 0$*, alors* x_0 *est un maximum local de* f *;*
(3) si $f''(x_0) = 0$ *mais* $f^{(3)}(x_0) \neq 0$*, alors* x_0 *n'est pas un extremum local de* f*.*

Theorem 5.7. *(La règle de L'Hopital) Soient* f *et* g *deux fonctions de classe* C^∞ *telles que* $f(0) = g(0) = 0$ *et que* g *admet au moins une dérivée en* 0 *non nulle. Alors les calculs successifs suivants déterminent la limite de la forme indéterminée ou justifie que sa limite n'existe pas :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = ...$$

6 Calcul intégral

Définitions :

Propriétés :

Définition de primitives, existence et unicité :

Theorem 6.1. *Soit F une primitive de f, alors on a la formule :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Formules de primitives, où $U(x)$ est une fonction de variable x :

f	F	f	F
$x^a, \quad a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$U^a \cdot U'$	$\frac{1}{a+1}U^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$\frac{1}{U} \cdot U'$	$\ln U$
$\frac{1}{\ln a \cdot x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot U} \cdot U'$	$\log_a U$
e^x	e^x	$e^U \cdot U'$	e^U
$a^x, \quad a > 0$	$\frac{1}{\ln a} \cdot a^x$	$a^U \cdot U'$	$\frac{1}{\ln a} \cdot a^U$
$\cos x$	$\sin x$	$\cos U \cdot U'$	$\sin U$
$\sin x$	$-\cos x$	$\sin U \cdot U'$	$-\cos U$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$	$\arccos U$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$	$\arcsin U$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+U^2} \cdot U'$	$\arctan U$