Cahier d'exercices, Mathématiques* 1

(Licence 1, semestre 1)

Mathématiques* 1
TD 1. Prérequis

Exercice 1. Le plan étant muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne $A(4;7), B(-8;2)$, $C(\frac{1}{2};-4)$, $\overrightarrow{u}(-3;5)$ et $\overrightarrow{v}(7;3,5)$.
1) Calculez les coordonnées de :

$$\overrightarrow{AB}, \quad 3\cdot\overrightarrow{CA}, \quad 4\overrightarrow{BA}-5\overrightarrow{CB};$$

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}, \quad 4\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}.$$

2) Calculez les coordonnes du milieu du segment [BC]; calculez la distance AC.
3) Est ce que les vecteurs $\overrightarrow{A}B$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires? Est ce que les points A, B et C sont alignés? Soit $D(x;-4)$, calculer la valeur de x pour que les points A, B et D soient alignés.
4) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$. Est ce que ces deux vecteurs sont perpendiculaires? Soit $\overrightarrow{w}(7;y)$, calculer la valeur de y pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ soient perpendiculaires.

Exercice 2. Déterminer une équation cartésienne (générale, réduite) et une équation paramétrique de la droite d sachant que:
1) d passe par $A(-6;4)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(5;-2)$.
2) d passe par les points $E(3;2)$ et $F(-5;0)$.
3) d passe par $B(4;1)$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{v}(1;-2)$.

Exercice 3. Etudier la position relative des droites suivantes. Si elles sont sécantes, calculer les coordonnées du point d'intersection.
1) d_1: $x+y_3=0$; d_2: $2x=-2y+8$.
2) d_1: $2x+y-4=0$; d_2: $3x-y-1=0$.

Exercice 4. On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x-1}{3x+6}$.
1) Déterminer le domaine de définition D_f.
2) Donner les images par f de $0;2;-3$.
3) Les nombres $2;\frac{2}{3};-3$ ont-ils des antécédents par f? Si oui, déterminer ces antécédents.

Exercice 5. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, tracer les graphiques des focntions affines suivantes:

$$f(x)=3x-5; \quad g(x)=-x+6, \quad h(x)=7.$$

1) En déduire les tableaux de signes et de variations de ces fonctions.
2) Dresser les tableaux de signes et les tableaux de variations des fonctions suivantes:

$$w(x) = 2x + 8, \quad i(x) = -3x + 9.$$

Mathématiques* 1
TD 2. Nombres réels

Exercice 6. Montrer que

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2.$$

Exercice 7. Montrer les inégalités suivantes, pour tout x, y, z réels:
(1) $x^2+y^2 \geq 2xy$.
(2) Pour $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
(3) $xy \leq (\frac{x+y}{2})^2$.
(4) $x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz$.

Exercice 8. (1) Calculez 3!, 0!, 9!, C_5^2, C_5^3, C_5^0, C_5^5, C_{10}^8.
(2) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

En déduire que $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$ et que $0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k$.
(3) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$,

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Exercice 9. Vérifier la relation $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. trouver ensuite une relation similaire pour $(a+b+c+d)^2$.

Exercice 10. Justifier que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnel.

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(1) $3x+4=0$
(2) $4x-5=x+4$
(3) $x^2-x-6=0$
(4) $x^2-4x+4=0$
(5) $x^2-2x+5=0$
(6) $2x^2-3x-1=0$
(7) $3x^2+4x+3=4x^2-3x+4$
(8) $\frac{3x+4}{4x+2}=x$
(9) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}$

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:
(1) $2x - 4 \leq 0$
(2) $x^2 - 2x - 8 > 0$
(3) $\frac{2x+1}{3x+2} < 0$
(4) $2x^3 - 5x^2 + 3x \leq 0$
(5) $\mid x + 1 \mid < 0,1$
(6) $\mid x - 2 \mid > 10$

Exercice 13. (1) Parmi les 1200 pièces fabriquées par une usine, on constate que 23 ne sont pas conformes. Calculer le pourcentage de pièces non conformes.
(2) On estime que le pourcentage de pièces non conformes est $1,3\%$. En sachant que 5600 pièces sont fabriquées, calculer le nombres de pièces non conformes.

Exercice 14. (1) Le prix initial d'un produit est 17 euros. Si le prix augmente de 35%, quel sera son prix après l'augmentation? Si le prix diminue de 25%, quel sera le prix après cette diminution?
(2) Le prix initial d'un produit est 256 euros. Ce prix a subi 3 augmentations identiques en pourcentages pour atteindre 314 euros. Quel est le pourcentage de chaque augmentation ?

Exercice 15. Démontrer les identités suivantes ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2.$$

Exercice 16. (1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.
(2) (Inégalité de Bernoulli) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq 0$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Mathématiques* 1
TD 3. Géométrie dans l'espace

Exercice 17. Le plan étant muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on donne $A(4;7;1), B(-8;2;0)$, $C(\frac{1}{2};-4;2)$, $\overrightarrow{u}(-3;5;1)$ et $\overrightarrow{v}(7;3,5;2)$.
1) Calculez les coordonnées de :

$$\overrightarrow{AB},\ \ 3\cdot\overrightarrow{CA},\ \ 4\overrightarrow{BA}-5\overrightarrow{CB};$$

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\ \ \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v},\ \ 4\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}.$$

2) Calculez les coordonnes du milieu du segment [BC]; calculez la distance AC.
3) Est ce que les vecteurs $\overrightarrow{A}B$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires? Est ce que les points A, B et C sont alignés? Soit $D(x;y;2)$, calculer les valeurs de x et y pour que les points A, B et D soient alignés.
4) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$. Est ce que ces deux vecteurs sont perpendiculaires? Soit $\overrightarrow{w}(7;y;2)$, calculer la valeur de y pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ soient perpendiculaires.

Exercice 18. Décidez si les répères suivants sont directs ou indirects:
$(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$
$(A(1;1;1), \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$
$(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j})$
$(O, \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}+\overrightarrow{i})$

Exercice 19. Déterminer les équations paramétriques des droites ou plans suivants:
(1) la droite passant par $A(2;0;1)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(0;1;-1)$. Est ce que les points $B(2;2;-1)$ et $C(5;0;7)$ appartiennent à cette droite?
(2) la driote passant par $A(1;0;0)$ et $B(3;6,7;8)$.
(3) le plan passant par $A(1;3;-2)$ et dirigé par $\overrightarrow{u}(1;0;1)$ et $\overrightarrow{v}(0;-1;2)$. Est ce que les points $E(2;3;-1)$ et $F(2;4;9)$ appartiennent à ce plan?

Exercice 20. Calculer le produit scalaire et le produit vectoriel des vecteurs suivants:
(1) $\overrightarrow{u}(1;1;0)$ et $\overrightarrow{v}(1;-1;1)$
(2) $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$
(3) $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ et $2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$

Exercice 21. Calculer le produit mixte des triplets de vecteurs suivants, en déterminer s'ils forment un repère muni du point de base O, direct ou

indirect?
(1) $\vec{i}$, $\vec{k}$, $\vec{j}$
(2) $\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{i} - \vec{j}$, $3\vec{i}$
(3) $\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{k} + 2\vec{i}$

Exercice 22. Déterminer une équation cartésienne des plans suivants:
(1) le plan passant par $A(2;1;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;-1;3)$
(2) le plan passant par $A(2;3;-1)$, $B(1;1;0)$ et $C(-1;-2;4)$.

Exercice 23. Etudier la position relative des deux plans, on donnera l'équation de leur intersection si elle existe:
(1) $x+y+z=1$ et $x-y+z=1$
(2) $x=4y-2z$ et $8y=1+2x+4z$.

Exercice 24. Etudier la position relative de la droite et du plan suivant:

$$D : \begin{cases} x = 3-t \\ y = 2+t \\ z = 5t \end{cases}$$

et

$$P : \quad x - y + 2z = 9.$$

Exercice 25. Etudier la position relative des droites suivantes. Si elles sont sécantes, on donnera leur point d'intersection:
(1) $D: \quad x=-6t, \quad y=1+9t, \quad z=-3t.$
$D': \quad x=1+2s, \quad y=4-3s, \quad z=s.$
(2) $D: \quad x=1+2t, \quad y=3t, \quad z=2-t.$
$D': \quad x=-1-s, \quad y=4+s, \quad z=1+3s.$

Exercice 26. Donner une équation cartésienne du plan passant par le point $(-1,2,1)$ et contenant la droite d'intersection des deux plans suivants: $x+y-z=2$ et $2x-y+3z=1$.

Mathématiques* 1
TD 4. Suites

Exercice 27. En utilisant la définition, montrer que la suite $u_n = \frac{3n-1}{2n+3}$ converge vers $\frac{3}{2}$.

Exercice 28. Etudier la convergence des suites suivantes, en calculant leur limite:
(1) $\frac{n}{n+1}$
(2) $(-1)^n \frac{n+1}{n+3}$
(3) $\frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$
(4) $\frac{2^n - 3^{n+1}}{5^{2n}}$
(5) $n - \sqrt{n^2 - n}$
(6) $\sqrt{n(n+1)} - n$
(7) $\frac{4n^3+5n-7}{5n^3+10n^2-9n}$

Exercice 29. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + ... + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 30. Soient $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ tels que $u_0 < v_0$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n.$$

En déduire que ces deux suites convergent et ont la même limite.

Exercice 31. Soient $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a_0 < b_0$. On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.
(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < b_n$.
(2) Montrer que la suite a_n est croissante et que la suite b_n est décroissante.
(3) En déduire que les deux suites convergent et ont la même limite.

Mathématiques* 1
TD 5. Etude de fonctions

Exercice 32. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes: $\sqrt{x+7}$, $\ln(2x-6)$, $\frac{x^2-2x-1}{x^2-x-12}$.

Exercice 33. 1) Justifier que la fonction $f(x) = 3x - 5$ est croissante.
2) Justifier que $g(x) = x^2 = 2$ est paire, et que $h(x) = x^3 + 4x$ est impaire.
3) Justifier que la fonction $w(x) = \cos(2x)$ est π-périodique.
4) Justifier que la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{4} - \cos(10x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34. Calculer les limites suivantes, si elles existent:
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+5x-7}{3x^3-2x^2+5}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x^4+3x^2+x}{2x^3+x^2+3x}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+x^3+x+1}{2x^3+x-4}$,
$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^3}{1-x^7}$, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3} - x$, $\lim_{x\to 0, x>0} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$,
$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+3x^2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$,
$\lim_{x\to 0} x^2 \ln(x^4)$, $\lim_{x\to+\infty} \ln x \cdot e^{-x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{2x}+x^2)}{x}$.

Exercice 35. Soit $a \in \mathbb{R}$, calculer, si elle existe, $\lim_{x\to 0, x>0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ (on discutera selon les valeurs de a).

Exercice 36. Etudier la continuité des fonctions suivantes:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{x} & si \quad x < 0 \\ \frac{x^2+2x+3}{x^3+1} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

(2) $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & si \quad 0 < x < 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \\ \frac{x+1}{3x-1} & si \quad x > 1 \end{cases}$

(3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

Exercice 37. (1) Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ admet au moins une solution dans $[0, +\infty[$.
(2) Montrer que tout polynôme P réel de degré impair admet au moins une racine réelle.
(3) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f([0,1]) \subset [0,1]$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.
(4) Soient f et g deux fonctions continues définies sur $[0,1]$ telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = 3g(x)$.

Exercice 38. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. Montrer que f est continue et bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$. Déterminer sa fonction réciproque f^{-1}, en précisant le domaine de définition de f^{-1}.

Exercice 39. Calculer les dérivées des fonctions suivantes:
$3x$, 4, $\sqrt{x}$, $x^2 + 3x - 4$, $x^2 \cdot \cos x$, $\frac{x+2}{x-5}$, $(2x-3)^{10}$
$\sin(\cos(x))$, $\tan x$, $\frac{1}{1+\tan x}$
$\sin(x^5 + 2x)$, $e^x \cdot \ln(\ln(\ln x))$, $\sin(\frac{x^2}{\cos(x^3)+x^4})$.

Exercice 40. Etudier la dérivabilité des deux fonctions suivantes:
(1) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & si \quad x \neq 0 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & si \quad x \neq 0 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$

Exercice 41. Soit $f(x) = 2xe^{x^2}$, montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 42. (1) Pour tout $x \in [-1, 1]$, montrer que $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.
(2) Pour tout $x \neq 0$, simplifier l'expression $\arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$.

Exercice 43. En utilisant les théorèmes du cours, démontrer que
(1) $\forall x > 0$, $\frac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.
(2) $\forall a, b > 0$ tels que $a < b$, soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a^n < \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n$.
(3) Soit $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que $a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{n+1} = 0$, montrer que $\exists x \in]0, 1[$ tel que $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = 0$.
(Considérer la fonction $f(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + ... + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.)
(4) Soit P un polynôme réel ayant n racines réelles distinctes, montrer que P' en a au moins $n-1$.
(5) Calculer, à l'aide du théorème des accroissements finis,

$$\lim_{x \to +\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}).$$

Exercice 44. Soit f continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, telle que $f(0) = 0$ et f' soit croissante.
(1) Montrer que $\forall x > 0$, $f(x) \leq xf'(x)$.
(2) Soit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que g est croissante.

Exercice 45. (1) Montrer que $\forall x \in]0, \pi[$, $x \cos x - \sin x < 0$.
(2) Soient a, b tels que $0 < a < b < \pi$, montrer que $\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b}$.

Exercice 46. (1) Montrer qu'il existe un unique réel l tel que $\cos l = l$. Montrer que $l \in [0, 1]$.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos u_n$.
(2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
(3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mid u_{n+1} - l \mid \leq \sin(1) \mid u_n - l \mid$.
(4) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_n - l \mid \leq (\sin(1))^n \mid u_0 - l \mid,$$

en déduire que (u_n) converge vers l.

Exercice 47. Calculer le maximum et le minimum des fonctions suivantes:
(1) $f(x) = x^2 + 5x + 6$, $x \in [-4, 4]$
(2) $g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 10$, $x \in [0, 3]$
(3) $h(x) = -2\cos x - x$, $x \in [0, 4\pi]$.

Exercice 48. Calculer les limites suivantes, à l'aide des équivalents d'ordre convenable ou de la règle d'Hopital:
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - x\cos x - 2x}{x^5}$, $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{1+x^2} - \cos x)\frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x\ln(1+x^2)}$

Exercice 49. Calculer les équivalents en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes:
(1) $f(x) = \cos(x) - \sin x$, $n = 6$
(2) $g(x) = \cos(2x)$, $n = 4$
(3) $f(x) = xe^{x^2}$, $n = 7$

Exercice 50. Montrer que $\forall x > 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x,$$

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^x.$$

Mathématiques* 1
TD 6. Calcul intégral

Exercice 51. Calculer les intégrales suivantes:
$\int_0^3 x^2 dx, \quad \int_1^2 (3+4x^2+e^x-\cos x)dx$
$\int_0^2 xe^{x^2} dx, \quad \int_2^4 \ln(2x+1)dx, \quad \int_0^\pi x\cos(x^2-1)dx$
$\int_1^2 \frac{\sin(\ln x)}{x} dx, \quad \int_1^2 \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_0^1 e^x \ln(1+e^x) dx$

Exercice 52. Soit $V>0$ une constante, une voiture roule à une vitesse de $v(t) = Vt(1-t)\ km.h^{-1}$ durant l'intervalle de temps $0 \le t \le 1h$.
(1) Quelle a été sa vitesse maximale ?
(2) Quelle distance a-t-elle parcouru ?

Exercice 53. Calculer l'aire des domaines suivants:
(1) Le domaine entre les graphiques des fonctions $-x^2+x+2$ et x^2-3x+2
(2) Le domaine entre les graphiques des fonctions $\frac{x^3}{4}$ et x^2-x

Exercice 54. Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.